# Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé
Bacharelado em Matemática - UFPR
*jolubanco@gmail.com*

Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
*fernando.avila@ufpr.br*

---

**Resumo**

O Objetivo deste trabalho é obter técnicas de caracterização de conjuntos finitos e infinitos, para que assim seja possível estudar a enumerabilidade de alguns conjuntos numéricos, como por exemplo o conjunto dos números Algébricos e Transcendentes.

---

## Introdução

No estudo da Teoria de Conjuntos, um dos fatores pelo qual estamos interessados é a cardinalidade, que consiste, no caso finito, no número de elementos que determinado conjunto possui. Já no caso infinito, como não podemos contar seus elementos, é necessário classificá-los de acordo com a sua enumerabilidade, ou seja, se com determinado conjunto for possível construir uma bijeção entre os números naturais, dizemos que sua cardinalidade é o $\aleph_0$. A partir dos estudos de Gregor Cantor, essa definição de cardinalidade foi definida e constatou-se que: conjuntos infinitos podem possuir diferentes cardinalidades, como por exemplo os conjuntos não-enumeráveis, em particular o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Desta forma, o intuito deste artigo é estudar maneiras de classificar conjuntos em finitos ou infinitos, e posteriormente nos questionarmos sobre suas cardinalidades, onde iremos estudar técnicas para conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis.

### Conjuntos finitos e infinitos

Quando observamos a natureza, podemos classificar diversos eventos em grupos ou conjuntos, e assim realizar sua contagem, de modo que os dados obtidos sempre serão finitos. Este processo de contagem é realizado associando a cada numero natural um único elemento do conjunto e por fim tomando o maior natural obtido. Intrinsecamente estamos construindo uma função bijetora entre um subconjunto finito dos números naturais, que denotaremos por $I_n$, e o conjunto em estudo que denotaremos por $X$. Ou seja, a enumeração de um conjunto $X$ está condicionada a construção de uma função $f : I_n \subset \mathbb{N} \longrightarrow X$ que seja bijetora. Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 1.** *Um conjunto $X$ chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}, I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$, de modo que $\varphi : I_n \longrightarrow X$ é uma bijeção.*

**Exemplo 1.** *O conjunto dos zeros de um polinômio da forma $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ é finito.*

**Definição 2.** *Um conjunto $X$ chama-se infinito quando não é finito. Mais explicitamente, $X$ é infinito quando não é vazio, e além disso seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$.*

**Exemplo 2.** *Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos infinitos.*

Possuindo as definições acima, podemos agora enunciar alguns resultados que possam nos ajudar a mostrar que um conjunto seja finito, ou infinito.

**Teorema 1.** *Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \longrightarrow A$, então $A = I_n$.*

*Demonstração.* Usaremos indução em $n$. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que ele seja válido para um certo $n$ e consideremos uma bijeção $f : I_{n+1} \longrightarrow A$. Ponhamos $a = f(n+1)$. A restrição de $f$ a $I_n$ fornece uma bijeção $f^{'} : I_n \longrightarrow A - \{a\}$. Se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de indução, concluiremos que $A - \{a\} = I_n$ onde $a = n+1$ e $A = I_{n+1}$. Porém, se $A - \{a\} \subset I_n$ então deve se ter $n+1 \in A - \{a\}$. Neste caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n+1$. Então definiremos uma nova bijeção $g : I_{n+1} \longrightarrow A$ pondo $g(x) = f(x)$ se $x \neq p$ e $x \neq n+1$, enquanto $g(p) = a, g(n+1) = n+1$. Agora, a restrição de $g$ a $I_n$ nos dará uma bijeção $g^{'} : I_n \longrightarrow A - \{n+1\}$. Evidentemente, $A - \{n+1\} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução, $A - \{n+1\} = I_n$, donde $A = I_{n+1}$. □

**Corolário 1.** *Não pode existir uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ de um conjunto finito X sobre um parte própria $Y \subset X$.*

*Demonstração.* Com efeito, sejam $X$ finito e $Y \subset X$ uma parte própria. Existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$. Então o conjunto $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de $I_n$. Chamemos de $\varphi_a : A \longrightarrow Y$ a bijeção obtida por restrição de $\varphi$ a $A$. Se existisse uma bijeção $f : Y \longrightarrow X$, a composta $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_a : A \longrightarrow I_n$ seria também uma bijeção, contrariando o Teorema $1$. □

Segue do Corolário $1$, que para provar que determinado conjunto é infinito, basta mostrar que existe uma bijeção com uma parte própria. Assim, consideremos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, para provar que é infinito, tomemos o conjunto $P = \{2, 4, 6 \cdots\}$ dos números pares. Temos que $P \subset \mathbb{N}$, e considere $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$, dada por $f(n) = 2n$, é fácil ver que $f$ é bijetora, e consequentemente segue do Corolário $1$ que $\mathbb{N}$ não pode ser finito, portanto $\mathbb{N}$ é infinito.

**Teorema 2.** *Se $X$ é um conjunto finito então todo subconjunto $Y \subset X$ é finito. O número de elementos de $Y$ não excede o de $X$ e só é igual quando $Y = X$.*

*Demonstração.* Basta provar o teorema para o caso em que $X = I_n$. Isso é claro para $n = 1$ pois as únicas partes de $I_1$ são $\emptyset$ e $I_1$. Suponhamos o teorema demonstrado para $I_n$ e consideremos um subconjunto $Y \subset I_{n+1}$. Se for $Y \subset I_n$ então, pela hipótese de indução, $Y$ será um conjunto finito cujo número de elementos é $\leq n$ e, portanto, $\leq n+1$. Se porém, $n+1 \in Y$ então $Y - \{n+1\} \subset I_n$ e consequentemente existe uma bijeção $\phi : I_p \longrightarrow Y - \{n+1\}$, com $p \leq n$. Definiremos então uma bijeção $\varphi : I_{p+1} \longrightarrow Y$, pondo $\varphi(x) = \phi(x)$ para $x \in I_p$ e $\varphi(p+1) = n+1$. Segue-se que $Y$ é finito e seu número de elementos não excede $p+1$. Como $p \leq n$, temos $p+1 \leq n+1$. Resta apenas mostrar que se $Y \subset I_n$ tem $n$ elementos então $Y = I_n$. Isto porém é claro pois, pelo Corolário $1$, não pode haver uma bijeção de $I_n$ sobre sua parte própria $Y$. □

**Corolário 2.** *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função injetiva. Se $Y$ for finito então $X$ também será. Além disso, o número de elementos de $X$ não excede o de $Y$.*

*Demonstração.* De fato, $f$ define uma bijeção de $X$ sobre sua imagem $f(X)$, a qual é finita, por ser uma parte do conjunto $Y$. Além disso, o número de elementos de $f(X)$, que é igual ao de $X$, não excede o de $Y$. □

**Corolário 3.** *Seja $g : X \longrightarrow Y$ uma função sobrejetiva. Se $X$ for finito então $Y$ também será. Além disso, o número de elementos de $Y$ não excede o de $X$.*

*Demonstração.* Como $g$ é sobrejetiva, temos que $g$ possui inversa a direita, isto é, existe uma função $f : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = id_Y$. Então $g$ é inversa à esquerda de $f$ e, portanto, $f$ é uma função injetiva de $Y$ no conjunto finito $X$. Segue do Corolário $2$ que $Y$ é finito e seu número de elementos não excede o de $X$. □

Os resultados que acabamos de enunciar para conjuntos finitos fornecem, por exclusão, resultados sobre conjuntos infinitos. Como nosso maior interesse está no estudo da enumerabilidade de conjuntos infinitos, deixaremos para enunciar estes fatos como ferramentas da próxima seção. A Figura $1$ fornece um diagrama de alguns conjuntos infinitos importantes para nosso estudo.

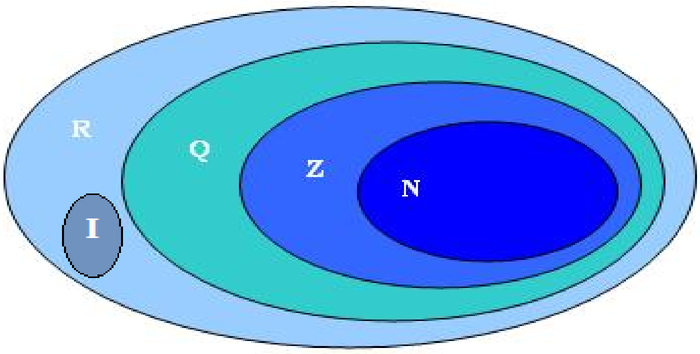


Figura 1: Diagrama dos Conjuntos Numéricos.

## Conjuntos Enumeráveis

Até este momento, enunciamos alguns resultados para comparar dois conjuntos finitos referente a quantidade de seus elementos, por meio do uso de funções. Agora, podemos ir além e nos questionar sobre o caso de conjuntos infinitos, será que podemos adaptar os resultados obtidos no caso finito para o infinito? Para responder essa pergunta, primeiramente é necessário distinguir conjuntos infinitos em dois casos: Infinitos Enumeráveis e Infinitos Não-Enumeráveis, começaremos pela definição do primeiro.

**Definição 3.** *Um conjunto $X$ é dito enumerável quando é finito, ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. No segundo caso, $X$ é dito infinito enumerável.*

**Exemplo 3.** *O conjunto $P = \{2, 4, 6, \cdots\}$ dos números pares é enumerável. Basta tomarmos a bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow I$ dada por $f(n) = 2n$. A lista formada a partir da função $f$ pode ser expressa da seguinte maneira:*

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

**Exemplo 4.** *O conjunto $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ dos números inteiros é enumerável. Para isso, podemos definir uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, de modo que:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{para} \quad n \text{ ímpar} \\ -\frac{n}{2}, & \text{para} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

*A lista formada a partir da função $f$, pode ser expressa da seguinte maneira:*

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \cdots & -n & n & \cdots \end{array}$$

**Teorema 3.** *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

*Demonstração.* Se $X$ é finito, nada há para demonstrar. Caso contrário, enumeramos os elementos de $X$ pondo $x_1 =$ menor elemento de X , e supondo definidos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, escrevemos $A_n = X - \{x_1, \cdots, x_n\}$. Observando que $A_n \neq \emptyset$, pois $X$ é infinito, definimos $x_{n+1} =$ menor elemento de $A_n$. Então $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $x \in X$ diferente de todos os $x_n$, teríamos $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $x$ seria um número natural maior do que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$, contrariando o Corolário $2$. □

**Teorema 4.** *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

*Demonstração.* Seja $X$ um conjunto enumerável, logo existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bijeção, de modo que $\varphi(n_1) = x_1, \varphi(n_2) = x_2, \ldots, \varphi(n_i) = x_i, \ldots$. Agora, tomemos $A \subset X$ com $A = X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ e $Y \subset \mathbb{N}$, de modo que $Y = \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$. Assim, temos que $\phi : Y \longrightarrow A$ é bijetora e portanto como $Y \subset \mathbb{N}$, segue do Teorema 3 que $Y$ é enumerável, e consequentemente existe $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ bijetora. Logo, tomando $(\phi \circ \psi) : \mathbb{N} \longrightarrow A$, temos que $(\phi \circ \psi)$ é bijetora, e assim $A$ é enumerável. □

**Corolário 4.** *Se $Y$ é enumerável e $\varphi : X \longrightarrow Y$ é injetiva, então $X$ é enumerável.*

*Demonstração.* Seja $Y$ enumerável, então existe $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ bijetora. Desta forma, como $\varphi$ é injetiva, tomemos a restrição de $Y$ a $Im(\varphi) = A$. Então, segue que $\phi : X \longrightarrow A$ é bijetora, e como $Y$ é enumerável, temos que pelo Teorema 4, $A \subset Y$ enumerável. Portanto, existe $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ bijetora, e assim $(\phi^{-1} \circ g) : \mathbb{N} \longrightarrow X$ é bijeção, disto segue que $X$ é enumerável. □

**Teorema 5.** *Seja X um conjunto enumerável. Se $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva, então $Y$ é enumerável.*

*Demonstração.* Com efeito, para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue-se daí que $g$ é injetiva. Pelo Corolário $4$, $Y$ é enumerável. □

**Teorema 6.** *Sejam $X, Y$ conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

*Demonstração.* Existem funções injetivas $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{N}$. Logo $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $g(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é injetiva. Assim sendo, pelo Corolário $4$, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso, definimos a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, onde $f(m, n) = 2^m 3^n$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, $f$ é injetiva, de onde fornece uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre o conjunto enumerável $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. □

O Teorema $6$ nos diz que para uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis, o produto cartesiano ainda será enumerável, entretanto para o caso infinito isso não ocorre, ou seja dados infinitos conjuntos enumeráveis, não necessariamente o produto cartesiano será enumerável.

**Corolário 5.** *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

*Demonstração.* Seja $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos inteiros não nulos, desta forma, temos que $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, que é enumerável como já vimos. Portanto, segue do Teorema 4 que $\mathbb{Z}^*$ também é enumerável. Agora, seja $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$, com $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$, temos que pelo Teorema 6, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, e assim como $\varphi$ é sobrejetiva, segue pelo Teorema 5 que $\mathbb{Q}$ é enumerável. □

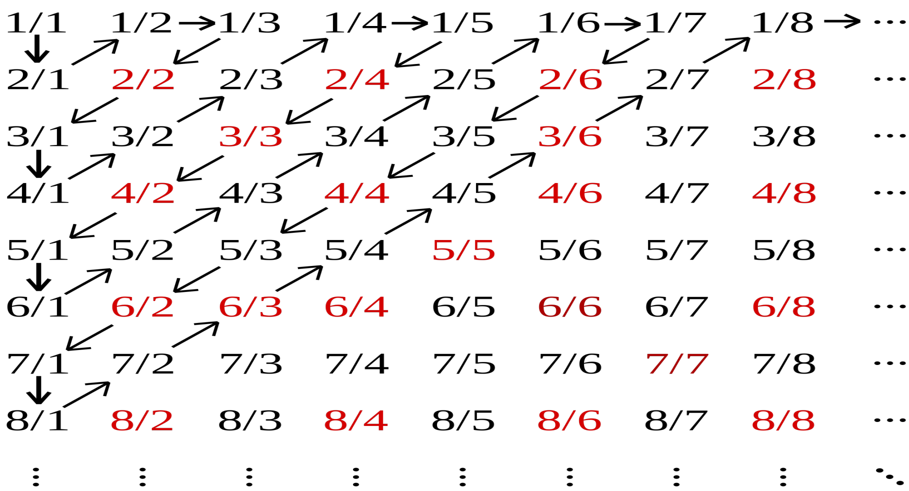


Figura 2: Procedimento de listagem do conjunto dos números racionais.

A Figura $2$ fornece uma maneira intuitiva de listarmos os números racionais, de modo a obter uma bijeção com os números naturais. Desta forma, seguindo as indicações das setas formamos a seguinte sequência:

$$\left( 1\, ,\, 2\, ,\, \frac{1}{2}\, ,\, \frac{1}{3}\, ,\, 3\, ,\, 4\, ,\, \frac{3}{2}\, ,\, \frac{2}{3}\, ,\, \frac{1}{4}\, ,\, \cdots \right)$$

**Corolário 6.** *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumerável é enumerável.*

*Demonstração.* Com efeito, dados $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ enumeráveis, existem sobrejeções $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow X_1, f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow X_2, \cdots, f_n : \mathbb{N} \longrightarrow X_n, \cdots$. Tomando $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, definimos a sobrejeção $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ pondo $f(m, n) = f_n(m)$. O caso de uma reunião finita $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ reduz-se ao anterior porque então $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n \cup X_n \cup \cdots$. $\square$

## Conjuntos não-enumeráveis

Até o momento, vimos alguns resultados para conjuntos enumeráveis infinitos, que em suma são conjuntos que podem ser postos em bijeção com os números naturais. Desta forma, surge o seguinte questionamento: Conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade, ou ”tamanho”? Em outras palavras, para qualquer conjunto infinito, é possível obter uma bijeção com os naturais? Veremos que existem conjuntos infinitos com cardinalidade maior do que o conjunto dos números naturais, como veremos. Mas para isso, segue a seguinte definição.

**Definição 4.** *Um conjunto $X$ é dito não-enumerável quando não é possível obter uma bijeção de $X$ com o conjunto dos números naturais.*

**Exemplo 5.** *Considere o conjunto de todas as listas infinitas enumeráveis, que se pode formar utilizando apenas os algarismos $0$ e $1$, como por exemplo:*

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \end{matrix}$$

*O conjunto de todas essas listas de zeros e uns é não enumerável. Para isso, considere $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots\}$ o conjunto de todas as sequências infinitas enumeráveis $s_i$ com $i \in \mathbb{N}$, formadas a partir da combinação dos números $0$ e $1$. Desta forma, queremos construir uma sequência infinita enumerável $s$ tal que $s \notin S$, portanto considere o primeiro termo da sequência $s_1$, e façamos o primeiro termo da sequência $s$ diferente deste. Agora considere o segundo termo da sequência $s_2$, e façamos o segundo termo da sequência $s$ diferente dele, e assim sucessivamente. Desta forma teremos que $s \neq s_1 \neq s_2 \neq \cdots \neq s_n \neq \cdots$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Portanto, acabamos de construir uma sequência infinita enumerável $s$ a partir da combinação de zeros e uns, tal que $s \notin S$, e assim temos que $S$ é não enumerável. A construção da sequência $s$ pode ser melhor compreendida a partir da Figura $3$.*

$$
\begin{array}{|lcl|}
\hline
s_1 & = & 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;\ldots \\
s_2 & = & 1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;\ldots \\
s_3 & = & 0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;\ldots \\
s_4 & = & 1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;\ldots \\
s_5 & = & 1\;1\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;0\;1\;\ldots \\
s_6 & = & 0\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;\ldots \\
s_7 & = & 1\;0\;0\;0\;1\;0\;0\;0\;1\;0\;0\;\ldots \\
s_8 & = & 0\;0\;1\;1\;0\;0\;1\;1\;0\;0\;1\;\ldots \\
s_9 & = & 1\;1\;0\;0\;1\;1\;0\;0\;1\;1\;0\;\ldots \\
s_{10} & = & 1\;1\;0\;1\;1\;1\;0\;0\;1\;0\;1\;\ldots \\
s_{11} & = & 1\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;0\;1\;0\;0\;\ldots \\
\vdots & & \vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\ddots \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|lcl|}
\hline
s & = & 1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;0\;0\;1\;1\;\ldots \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 3: Argumento da Diagonal de Cantor.

*Este argumento, em que se constrói um novo elemento de uma sequência a partir do modelo descrito acima é conhecido como Diagonal de Cantor, e utilizaremos está ferramenta para a demonstração do seguinte teorema.*

**Teorema 7.** *O intervalo $(0,1)$ dos números reais é não enumerável.*

*Demonstração.* Suponha que o intervalo $(0,1)$ seja enumerável, desta forma existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$ bijeção, e assim podemos listar todos os valores entre $(0,1)$ de modo que $\varphi(i) = x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, como descrito abaixo:

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 0, x_{11}x_{12}x_{13}\ldots \\
x_2 & = & 0, x_{21}x_{22}x_{23}\ldots \\
x_3 & = & 0, x_{31}x_{32}x_{33}\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
x_j & = & 0, x_{j1}x_{j2}x_{j3}\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Agora, vamos tomar um número $k \in (0,1)$ com $k = 0, k_1k_2k_3\ldots$. Ainda mais, vamos impor que $k_1 \neq x_{11}, k_2 \neq x_{22}, \ldots, k_j \neq x_{jj}, \ldots$. Em outras palavras, queremos que $k_i \neq x_{ii}, \forall i \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $k \in (0,1)$, porém $k \neq x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, e portanto existe um número no intervalo $(0,1)$ que não está listado por $\varphi$, uma contradição. Logo, o intervalo $(0,1)$ é não enumerável. $\square$

**Corolário 7.** *O conjunto dos números reais é não enumerável.*

*Demonstração.* Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e suponha que $\mathbb{R}$ é enumerável. Assim, pelo Teorema 4, todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Porém, pelo Teorema 7, o intervalo $(0,1)$ é não enumerável, uma contradição. Assim o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável. □

**Corolário 8.** *O conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

*Demonstração.* Seja $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ o conjunto dos números irracionais, e suponha que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ é enumerável. Desta forma, como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável e $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, segue do Teorema 6 que $\mathbb{R}$ é enumerável, uma contradição. Portanto, o conjunto dos números irracionais é não enumerável. □

Veja que a partir dos resultados demonstrados, podemos concluir que nem todos os infinitos são iguais. Ou seja, tanto o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ quanto o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ são infinitos, porém, como vimos, não existe uma bijeção entre estes conjuntos. Portanto o infinito que diz respeito aos conjunto dos números reais é maior do que o infinito que diz respeito ao conjunto dos números naturais.

## Números Algébricos e Transcendentes

Outros dois conjuntos infinitos de nosso interesse, serão os conjuntos dos números algébricos e dos números transcendentes, esses que são disjuntos e a partir da união formam o conjunto dos números reais. Desta forma, iniciemos com a seguinte definição.

**Definição 5.** *Um número real $x$ é dito algébrico se existem inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

**Exemplo 6.** *Considere o polinômio $p(x) = x^2 - x$, fazendo $p(x) = 0$ temos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ são raízes de $p(x)$, portanto $0$ e $1$ são números algébricos.*

**Teorema 8.** *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

*Demonstração.* Seja $P^n(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios de coeficientes inteiros com grau no máximo $n$. Agora, tomemos a função:

$$\psi : \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow P^n(\mathbb{Z})$$

Tal que,

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \mapsto \psi(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Desta maneira, $\psi$ é bijetiva. Agora, como $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável, e $\mathbb{Z}^{n+1}$ é o produto cartesiano finito de $\mathbb{Z}$, temos que pelo Corolário 6 , $\mathbb{Z}^{n+1}$ é enumerável. Além disso, como $\psi$, em particular, é sobrejetiva, segue do Teorema 5 que $P^n(\mathbb{Z})$ é enumerável.

Agora, seja $P(\mathbb{Z})$ o conjunto dos polinômios de qualquer grau, ou seja:

$$P(\mathbb{Z}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^n(\mathbb{Z})$$

Como $P^n(\mathbb{Z})$ é enumerável, e de acordo com o Teorema 6, a reunião de conjuntos enumeráveis é enumerável, segue que $P(\mathbb{Z})$ é enumerável. Por fim, consideremos a função:

$$\varphi : P(\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigcup_{p \in P(\mathbb{Z})} R_p$$

De modo que, $\varphi$ associa a cada polinômio $q \in P(\mathbb{Z})$, o conjunto de suas raízes $R_q \in \bigcup R_p$. Desta forma, temos que $\varphi$ é sobrejetiva, e portanto pelo Teorema 5, o conjunto:

$$\bigcup_{p \in P(\mathbb{Z})} R_p$$

é enumerável. □

Agora queremos analisar a enumerabilidade do conjunto dos números transcendentes, para isso precisamos inicialmente defini-los.

**Definição 6.** *Dizemos que um número $\alpha$ é transcendente quando ele não é algébrico. Isto é, não existe polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros tal que $\alpha$ seja solução de $p(x)$.*

**Corolário 9.** *O conjunto dos números transcendentes é não enumerável.*

*Demonstração.* Por definição, temos que $\mathbb{R} = (\text{ algébricos }) \cup (\text{ trancendentes })$. Assim, suponha que o conjuntos dos números transcendentes seja enumerável. Desta forma teríamos que $\mathbb{R}$ deveria ser enumerável, pois o conjuntos dos números algébricos é enumerável segundo o Teorema $8$, e segue do Corolário $6$ que a união de conjuntos enumeráveis é enumerável. Logo, chegamos à um absurdo, pois como vimos, $\mathbb{R}$ é não enumerável. Portanto, o conjuntos dos números transcendentes é não enumerável. □

A mesma observação feita para os números reais e naturais, pode ser aplicada para os números algébricos e transcendentes. Tendo em vista que usualmente estamos mais familiarizados com os números algébricos, devido ao fato de serem raízes de polinômios, os resultados apresentados nos mostram uma visão contra intuitiva, no sentido de existirem mais números transcendentes do que algébricos, mesmo que não os conheçamos.

Por exemplo, considere a reta real. Agora tome os números algébricos e os pinte de amarelo, agora considere os números transcendentes, e os pinte de vermelho, após realizar estes passos o resultado obtido será a reta real colorida de vermelho, devido a não enumerabilidade dos números transcendentes. Este raciocínio pode ser esboçado, de maneira simplista, na Figura $4$.

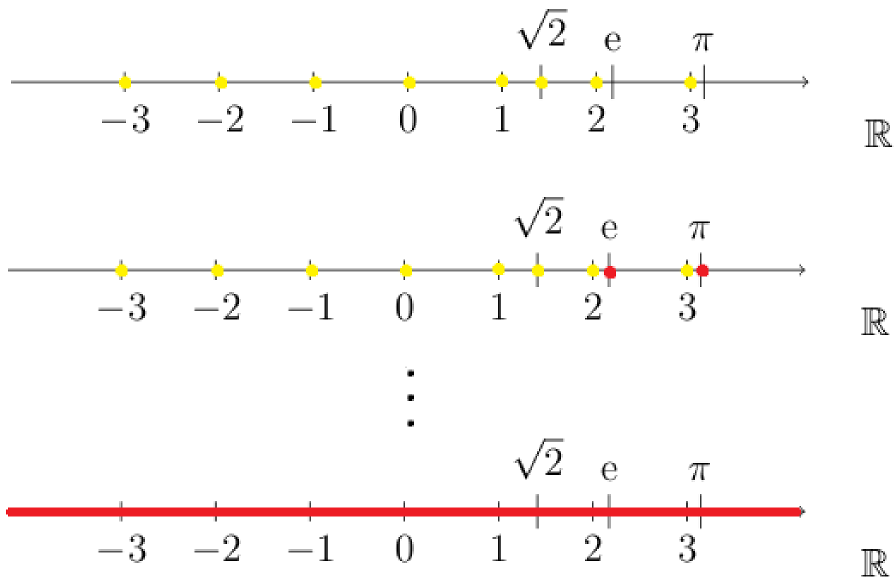


Figura 4: Dispersão dos números algébricos e transcendentes na reta real.

# Referências


[1] LIMA, Elon **Análise Real.** Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária), 2004.

[2] LIMA, Elon **Curso de Análise.** Volume 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2014.

[3] RUDIN, Walter. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

[4] GONÇALVES, Mirian; GONÇALVES, Daniel. **Elementos da Análise**. Florianópolis. 2. ed, 2012.